УДК 517.956.4

В. И. Шевченко

КЛАССЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ, КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИЛЬНО СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе для параболических уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой, заданный в цилиндре (в частности, в полупространстве) без краевых условий на боковой поверхности цилиндра, исследована задача Коши в классах сильно сингулярных функций. В классах, аналогичных классам Тихонова — Тэклинда, исследована единственность и корректная разрешимость задачи Коши. Изучена стабилизация в классах сильно сингулярных функций, в частности для уравнения теплопроводности получены условия стабилизации в классе функций, имеющих степенной рост на бесконечность.

Рассмотрим уравнение

$$Su = \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} + L_t u(x,\ t) = f(x,\ t) \tag{1}$$

в области $Q_T = G \times [0,\ T],\ G \subseteq \boldsymbol{R}^N,\ 0 < T \leqslant \infty$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x). \tag{2}$$

Операция L_t задана соотношением

$$L_t = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x,\ t) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,\ t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,\ t) \tag{3}$$

и удовлетворяет на некотором множестве $Q_0 \subseteq Q_T$ условию

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x,\ t)\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant 0, \quad \forall (x,\ t) \in Q_0, \quad \xi \in C^N, \quad \xi \neq 0. \tag{4}$$

На боковой поверхности цилиндра Q_T отсутствуют краевые условия, b_i — вещественная.

Классы единственности. Введем пространство функций $\mathscr{L}_g^2$ с нормой

$$\|\varphi\|^2_{\mathscr{L}_g^2} = \int_G e^{-2g(x)} |\varphi(x)|^2\, dx.$$

При исследовании единственности под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию

$$u(x,\ t) \in \mathscr{L}_1^2((0,\ T),\ \mathscr{L}_g^2),$$

которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} uS_t^{+}\Phi\, dxdt = \int_{Q_T} f\Phi\, dxdt + \int_G \varphi\Phi(x,\ 0)\, dx \tag{5}$$

при условии, что $f \in \mathscr{L}^2((0,\ T),\ \mathscr{L}_g^2)$, $\varphi \in \mathscr{L}_g^2$, а $\Phi(x,\ t)$ — произвольная гладкая, финитная по x функция с условием

$$\Phi(x,\ T) = 0,\ \operatorname{supp}\Phi \in G, \quad \forall t \in [0,\ T].$$

Пространство $\mathscr{L}_g^2$ мы назовем классом единственности, рассматриваемой задачи Коши, если всякое решение $u \in \mathscr{L}_g^2$ задачи (1), (2) при $\varphi = 0$, $f = 0$ почти всюду равно нулю. При $G = \boldsymbol{R}^N$ единственность задачи Коши в классах быстро растущих функций исследовался многими авторами (см. [1, 2]). Заменой

$$v = ue^{-h(x,t)}; \quad \tilde{f} = e^{-h}f, \quad \tilde{\varphi} = \varphi e^{-h(x,0)} \tag{6}$$

при условии, что $h(x,\ t)$ удовлетворяет оценке

$$e^{2(g-h)}(1 + |h_t'|) \leqslant c \quad \forall (x,\ t) \in Q_T,$$

единственность задачи Коши (1), (2) в метрике $\mathscr{L}_g^2$ сводится к единственности в метрике $\mathscr{L}^2$. При этих преобразованиях уравнение (1) примет вид

$$\tilde{S}v = \frac{\partial v}{\partial t} + \tilde{L}_t v = \tilde{f}, \tag{7}$$

$$\tilde{L}_t = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \tilde{b}_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{b}_i(x, t) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \tilde{c}(x, t);$$

$$\tilde{b}_i = \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} h_{x_j}; \quad \tilde{c} = -\sum_{i=1}^{N} a_{i,j} h_{x_i} h_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i h_{x_i} + h_t'. \tag{8}$$

Соответственно тождество (5) примет вид

$$\int_{Q_T} v\tilde{S}^+ \Phi dx dt = \int_{Q_T} f \Phi dx dt + \int_G \tilde{\varphi} \Phi(x, 0)\, dx. \tag{9}$$

По операции $\tilde{L}_t$, при фиксированном $t \in [0, T]$, построим минимальный $\tilde{L}_{t,\min}$ и максимальный $\tilde{L}_{t,\max}$ операторы: $\tilde{L}_{t,\min} = \tilde{L}_{t,0}$; $\tilde{L}_{t,\max} = (\tilde{L}_{t,\min}^+)^*$, здесь $\tilde{L}_{t,0} v = \tilde{L}_t v$, $\mathscr{D}(\tilde{L}_{t,0}) = C_0^\infty(G)$.

Лемма 1. Пусть $\tilde{L}_{t,\min} = \tilde{L}_{t,\max}\ \forall\, t \in [0, T]$, тогда $\mathscr{L}_g^2$ будет классом единственности задачи Коши (1), (2).

Пусть $\tilde{f} \equiv 0$, $\tilde{\varphi} \equiv 0$, покажем, что $v \equiv 0$. Из предположения леммы следует, что формулу $G(v, \Phi) = \int_{Q_T} (v\tilde{S}^+\Phi)\, dx dt$ можно по непрерывности продожить на

$$v \in \mathscr{L}^2((0, T), \mathscr{D}(\tilde{L}_{t,\max})) \cap \mathscr{L}^2((0, T), \mathscr{L}^2(G)).$$

Возьмем $\Phi = \varphi(t)\, v$, где $\operatorname{supp} \varphi = [t_0, t_1] \subset [0, T]$, φ — дифференцируема за исключением конечного числа точек:

$$\operatorname{Re} G(v, \Phi) = \frac{1}{2} \varphi \| v(t) \|^2 \Big|_{t_0}^{\tau} + \frac{1}{2} \varphi \| v(t) \|^2 \Big|_{\tau}^{t_1} -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \varphi' \| v(t) \|^2 dt + \operatorname{Re} \int_{t_0}^{t_1} \varphi (\tilde{L}_t v, v)\, dt, \quad t_0 < \tau < t_1, \tag{10}$$

здесь $\| \ \|$ и $(\ \ )$ — норма и скалярное произведение в $\mathscr{L}^2(G)$. Используя лемму Витали, легко показать, что промежуток (t_0, t_1) можно покрыть счетной системой непересекающихся интервалов, на каждом из которых форма $\operatorname{Re}(\tilde{L}_t v, v)$ почти всюду знакоопределена.

Полагая в (10) $\varphi = \chi(t_0, t_1)$, где χ — характеристическая функция интервала (t_0, t_1), получаем, что $\| v(t) \|$ монотонно растет на (t_0, t_1) при условии, что $\operatorname{Re}(\tilde{L}_t v, v) \geqslant 0$ почти всюду и убывает, если $\operatorname{Re}(\tilde{L}_t v, v) \leqslant 0$ почти всюду.

Возьмем теперь в (10) $\varphi = k_1(t - t_0)$ при $t \in [t_0, \tau]$ и $\varphi = k_2(t - t_1)$ при $t \in [\tau, t_1]$. Здесь

$$k_1 \int_{t_0}^{\tau} \| v(t) \|^2 dt = k_2 \int_{\tau}^{t_1} \| v(t) \|^2 dt.$$

Учитывая приведенные построения и обозначая предел слева и справа $\varphi(t)$ в точке τ через φ_+ и φ_-, соответственно из тождества (10) получаем равенство

$$\frac{1}{2} (\varphi_+ - \varphi_-) \| v(\tau) \|^2 + \operatorname{Re} \int_{t_0}^{t_1} \varphi (\tilde{L}_t v, v)\, dt = 0$$

Так как $v \in \mathscr{L}_1^2((0, T), \mathscr{L}^2(G))$, то $\tau \in (t_0, t_1)$ можно выбрать так, чтобы $\varphi_+ - \varphi_- > 0$, если $\operatorname{Re}(\tilde{L}_t v, v) \geqslant 0$ и $\varphi_+ - \varphi_- < 0$, если $\operatorname{Re}(\tilde{L}_t v, v) \leqslant 0$ почти всюду. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

От операции L_t в дальнейшем будем требовать, чтобы для

$$\forall u,\ v \in \mathscr{D}(L_{t,\max}),\ \varphi \in C_0^2(G)$$

в форме $(\tilde{L}_t v, \varphi v)$ допускалась возможность интегрирования по частям.

Пусть $M(x)$ — положительная гладкая функция и множества $G_\nu = \{x : M(x) < \nu\}$, такие, что $\bar{G}_\nu \subset G$. Построим последовательность функций соотношениями:

$$\mu_{\nu,k-1} = (M-\nu)^{2(k-1)}(\nu+1-M)^{2(k-1)} \quad \text{для} \quad x \in \Pi_\nu,$$

$$\pi_\nu = G_{\nu+1}/G_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots,$$

$$\varphi_{\nu,k} = Q^2 \mu_{\nu,k} \quad \text{для} \quad x \in \Pi_\nu,$$

$$\varphi_{\nu,k} \equiv \mu_{\nu,k} \equiv 0 \quad \text{для} \quad x \in \Pi_\nu.$$

Здесь $0 < Q(x) \leqslant 1$, $Q(x) \in C^1(G)$

$$\mathscr{A}_\varphi = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant N} a_{i,j} Q^{-2}(M_{x_i} M_{x_j} \mu_{\nu,k-1} + Q_{x_i} Q_{x_j} \varphi_{\nu,k} +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant j \leqslant N} (|b_i Q_{x_i}| Q^{-1} \varphi_{\nu,k} + |b_i Q^2 M_{x_i}| \mu_{\nu,k-1} +$$

$$+ |b_i Q_{x_i}| Q^{-1} \varphi_{\nu,k} + |b_1 M_{x_i}| Q^2 \mu_{\nu,k-1} + |b_{i,x_i}| \varphi_{\nu,k}).$$

Лемма 2. Пусть для $x \in \Pi_\nu$ при ν достаточно больших, $\forall\, t \in [0, T]$ операция L_t удовлетворяет условию эллиптичности (4), существует постоянная c_1, для которой верна оценка

$$\mathscr{A}_\varphi - \varphi_{\nu,k} \operatorname{Re} \tilde{c}(x, t) \leqslant c_1 \quad (x, t) \in \Pi_\nu \times [0, T], \tag{11}$$

тогда $\tilde{L}_{t,\min} = \tilde{L}_{t,\max}$ $\tilde{L}_{t,\min}^+ = \tilde{L}_{t,\max}^+$.

Доказательство сводится к дословному рассуждению, приведенному в [3]. Из леммы 1, 2 следует, что при приведенных ограничениях $\mathscr{L}_g^2$ будет классом единственности задачи Коши (1), (2).

Теорема 1. Пусть I) существует положительная функция $a(x)$, удовлетворяющая в окрестности ∂G оценкам:

$$1)\ |M_{x_i}| \leqslant c_1 Q a^{-\frac{1}{2}}; \quad 2)\ |Q_{x_i}| \leqslant c_2 a^{-\frac{1}{2}}; \quad 3)\ |g_{x_i}| \leqslant c_3 Q^{-1} a^{-\frac{1}{2}};$$

II) операция L_t удовлетворяет в окрестности границы ∂G условию эллиптичности (4) и ее коэффициенты оценкам

$$1)\ |a_{i,j}| \leqslant c_4 a; \quad 2)\ |b_i| \leqslant c_5 Q^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}; \quad 3)\ |b_{i,x_i}| \leqslant c_6 Q^{-2};$$

4) $\operatorname{Re} c \geqslant -c_7 Q^{-2}$; $c_1, c_2, \ldots, c_7$ — положительные постоянные.

Тогда $\mathscr{L}_g^2$ — класс единственности задачи Коши (1), (2).

Согласно лемме 2 нужно показать выполнимость оценки (11) для $x \in \Pi_\nu$ при больших ν. Из условия теоремы

$$|\tilde{b}_i| = |\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} g_{x_j}| \leqslant c a^{1/2} Q^{-1},$$

следовательно, для $x \in \Pi_\nu$ при больших ν будут иметь место оценки

$$\mathscr{A}_{\varphi_\nu} \leqslant c_8 (a Q^{-2} Q^2 a^{-1} + a a^{-1} +$$

$$+ a^{1/2} Q^{-1} a^{-1/2} Q^{-1} Q^2 + a^{1/2} Q^{-1} Q^2 Q^{-1} a^{-1/2} +$$

$$+Q^{-1/2}a^{1/2}a^{-1/2}Q^{-1}Q^2+Q^{-1/2}a^{1/2}Qa^{-1/2}Q^2+$$
$$+Q^{-2}Q^2)\leqslant c_g.$$

Аналогично устанавливается ограниченность последовательности $\varphi_\nu \mathrm{Re}\,\tilde{c}$.

Пусть $G=\{x:|x|<R\}$, где $0<R\leqslant\infty$, а функции $a(x)$ и $Q(x)$ сферично симметричны:

$$a(x)=a(|x|).$$

Положим

$$M(x)=\int\limits_0^{|x|}Q(t)\,a^{-1/2}(t)\,dt;\; g(x)=Q^{-1}\int\limits_0^{|x|}a^{-1/2}(t)\,dt.$$

Следствие. Пусть выполнены оценки II в теореме 1, а вместо оценок I следующие условия:

$$1)\ \lim_{|x|\to R}M(x)=\infty;\quad 2)\ \left|Q_{x_i}\int\limits_0^{|x|}a^{-1/2}(t)\,dt\right|\leqslant cQ^{-1}a^{-1/2},$$

тогда $\mathscr{L}_g^2$ — класс единственности задачи Коши (1), (2).

Полученные классы единственности аналогичны известным классам Теклинда. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть $R=\infty$ $(G=R^N)$, $a(x)=|x|^{2\alpha}$, $\alpha\neq 0$, $Q(x)=|x|^{-\beta}$, $\alpha-\beta<1$, $g(x)=|x|^{\beta-\alpha+1}$, а при $\alpha=0$ полагаем $Q=\frac{1}{|x|\ln|x|}$, $g=|x|^2\ln|x|$ и выполнены оценки II теоремы 1, тогда при соответствующей функции $g(x)$, $\mathscr{L}_g^2$ — класс единственности задачи Коши (1), (2).

Пример 2. Пусть $0<R<\infty$, $a(x)=(R-|x|)^{2\alpha}$, $Q=(R-|x|)^{\beta}$ $(\beta\geqslant 0)$, $\alpha>1+\beta$, $g=(R-|x|)^{\alpha-\beta+1}$, тогда если выполнены оценки II теоремы 1, $\mathscr{L}_g^2$ будет классом единственности задачи Коши (1), (2). Условия теоремы 1 ограничительны на сингулярность старших коэффициентов, их степенная сингулярность не выше второго порядка. Исследуем возможность повышенной сингулярности старших коэффициентов. Эта ситуация, по-видимому, ранее не изучалась.

Предложение. Пусть $b(x)\geqslant a^{1+\varepsilon}(x)$ $(\varepsilon>0)$, тогда существуют $K(\varepsilon)$ и c_1 (постоянная), не зависящая от ν, для которых верна оценка

$$Q_\nu=a\mu_{\nu,k}-b\mu_{\nu,k+s}\leqslant c_1,$$

$0<s$ — некоторая фиксированная постоянная.

Введем обозначения $\alpha(x)=a^{-\varepsilon/4s}$ и множества $\pi_{0\nu}=\{x:Q_\nu>0\}\cap\pi_\nu$, $\pi_{1,\nu}=\{x:\nu<M<\alpha+\nu\}\cap\pi_\nu$, $\pi_{2,\nu}=\{x:\nu<M<\nu+1-\alpha\}\cap\pi_\nu$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что для $x\in\pi_\nu$ $\alpha<1$. Для $x\in\pi_{0,\nu}$, $a^{-1}b\,\mu_{\nu,s}<1$, так как $Q_\nu=a\mu_{\nu,k}(1-a^{-1}b\mu_{\nu,s})$, предложение будет доказано, если мы покажем, что для $x\in\pi_{0,\nu}$ Q равномерно ограничено. $\pi_{0,\nu}\subset\pi_{1,\nu}\cup\pi_{2,\nu}$, действительно, если бы нашлась точка $x\in\pi_{0,\nu}$, но $x\notin\pi_{1,\nu}\cup\pi_{2,\nu}$, то для этой точки $M>\alpha+\nu$, $M<\nu+1-\alpha$, следовательно,

$$a^{-1}b\mu_{\nu,s}=a^{-1}b\,(M-\nu)^{2s}(\nu+1-M)^{2s}\geqslant$$
$$\geqslant a^{-1}b\,(a^{-\varepsilon/4s})^{4s}=a^{-(1+\varepsilon)}b\geqslant 1,$$

а это противоречит определению множества $\pi_{0,\nu}$.

Далее для $x\in\Pi_{1,\nu}\cup\Pi_{2,\nu}$ $a(x)\,\mu_{\nu,k}=a\,(M-\nu)^{2k}(\nu+1-M)^{2k}\leqslant$

$$\leqslant a\alpha^{2k}=aa^{-\frac{\varepsilon k}{2s}}<1.$$

Следовательно, Q будет равномерно ограничено для $k>\frac{2s}{\varepsilon}$. Предложение доказано.

Пусть $G=\{x:|x|<R\}$, $0<R\leqslant\infty$.

Теорема 2. Пусть для $x \in \Pi_\nu$ при ν больших и для некоторых положительных функций $a(|x|)$ и $g(|x|)$, связанных соотношением

$$M(x) = \int_0^{|x|} \sqrt{\frac{g^{(1-\delta)}}{a}}\,dt, \quad \lim_{t\to R} M(t) = \infty;$$

выполнены оценки

$$|a_{i,j}| \leqslant c_1 a; \ |b_i| \leqslant c_2 a^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1-\delta}{2}}; \ |b_{i,x_i}| \leqslant c_3 g^{1-\delta}, \quad \operatorname{Re} c \geqslant g,$$

а для произвольной фиксированной постоянной c_4 существует δ, $0 < \delta < 1$, такая, что для $x \in \Pi_\nu$ (ν — большое) $g \geqslant c_4 g^{1-\delta}$, тогда при $g = M(x) = h(x, t)\ \mathscr{L}_g^2$ будет классом единственности задачи Коши.

Из условий теоремы

$$|\tilde{b}_i| \leqslant a \sqrt{\frac{g^{1-\delta}}{a}} = \sqrt{a g^{1-\delta}}; \ |M_{x_i}| \leqslant \frac{|x_i|}{|x|} \sqrt{\frac{g^{1-\delta}}{a}},$$

следовательно, полагая $Q = \mathrm{const}$, имеем оценки

$$\mathscr{A}_{\varphi_\nu} \leqslant c_5 \Big(a \frac{g^{1-\delta}}{a} \mu_{\nu,k-1} + \sqrt{a g^{1-\delta}} \sqrt{\frac{g^{1-\delta}}{a}} \mu_{\nu,k-1} +$$

$$+ a^{1/2} g^{(1-\delta)/2} a^{-1/2} g^{(1-\delta)/2} \mu_{\nu,k-1} + g^{1-\delta}\varphi_\nu \Big) \leqslant$$

$$\leqslant c_6 g^{1-\delta} \mu_{\nu,k-1}, \quad -\operatorname{Re} \tilde{c}\varphi_\nu \leqslant -c_4 g \varphi_\nu + c_7 g^{1-\delta}\varphi_\nu \leqslant -c_8 g \varphi_\nu.$$

Следовательно,

$$\mathscr{A}_{\varphi_\nu} - \operatorname{Re} \tilde{c}\varphi_\nu \leqslant c_6 g^{1-\delta} \mu_{\nu,k} - c_8 g \mu_{\nu,k}.$$

Из предложения и леммы 2 мы получаем утверждение теоремы 2.

Классы корректной разрешимости. При исследовании классов корректной разрешимости задачи Коши (1), (2) под решением мы подразумеваем функцию $u \in \mathscr{L}_1^2((0, T), \mathscr{L}_g^2)$, удовлетворяющую тождеству (5). Будем также предполагать, что $L_t = L$ не зависит от t и удовлетворяет условию эллиптичности (4) во всей области G. Будем использовать следующее утверждение, вытекающее из работы Л. Н. Прокопенко [4, гл. 1, теорема 6].

Теорема 3. Пусть $\tilde{L}_{\min} = \tilde{L}_{\max}$ и для $\forall\, v \in C_0^\infty(G)$ выполнена оценка

$$\operatorname{Re}(Lv, v) \geqslant \alpha \|v\|_{H_g^+}^2 + \beta \|v\|_{\mathscr{L}_g^2}^2 \quad (\alpha > 0), \tag{12}$$

тогда для любых $f \in \mathscr{L}^2((0, T), H_g^-)$, $\varphi \in \mathscr{L}_g^2$ задача Коши (1), (2) обладает единственным решением

$$u \in C((0, T), \mathscr{L}_g^2) \cap \mathscr{L}^2((0, T), H_g^+),$$

которое удовлетворяет оценке

$$\max_{t\in(0,T)} \|u\|_{\mathscr{L}_g^2} + \|u\|_{\mathscr{L}^2((0,T),H_g^+)} \leqslant c_1 [\|\varphi\|_{\mathscr{L}_g^2}^2 + \|f\|_{\mathscr{L}^2((0,T),H_g^-)}]. \tag{13}$$

Здесь H_g^+, H_g^- — соответственно некоторое позитивное и негативное пространство, которое будет описано ниже.

Теорема 4. Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме оценки II (4), вместо которой потребуем, чтобы для $x \in G$ выполнялась оценка $\operatorname{Re} c \geqslant \alpha_1 Q^{-2} + \beta_1$, (α_1, β_1) — некоторые положительные постоянные. Тогда в качестве H_g^+ можно взять пространство с нормой

$$\|u\|_{H_g^+}^2 = \operatorname{Re} \int_G \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} v_{x_i} \bar{v}_{x_j} dx + \beta_1 \int_G |v|^2 dx,$$

H_g^- двойственно к H_g^+, $v = e^{-g}u$ и задача Коши (1), (2) для любых $f \in \mathscr{L}^2((0, T), H_g^-)$, $\varphi \in \mathscr{L}_g^2$ имеет единственное решение u класса

$$C((0, T), \mathscr{L}_g^2) \cap \mathscr{L}^2((0, T), H_g^+),$$

удовлетворяющее неравенству (13).

Проверим выполнимость оценки (12). Для $\forall\, v \in C_0^\infty(G)$ имеем тождество и неравенство

$$\mathrm{Re}(\tilde{L}v, v) = \mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{N}\int_G a_{i,j}v_{x_i}\bar{v}_{x_j}dx + $$

$$+ \mathrm{Re}\sum_{i=1}^{N}\int_G b_i v_{x_i}\bar{v}dx + \mathrm{Re}\int_G \tilde{c}\,|v|^2\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i,j}^{N}\mathrm{Re}\int_G a_{i,j}v_{x_i}\bar{v}_{x_j}dx + \int_G\Bigl(\mathrm{Re}\,\tilde{c} -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}|b_{i,x_i}|\Bigr)|v|^2\,dx.$$

Оценим $\mathrm{Re}\,\tilde{c} - \frac{1}{2}|b_{i,x_i}|$, используя ограничения теорем 1, 4

$$\mathrm{Re}\tilde{c} - \frac{1}{2}|b_{i,x_i}| = \mathrm{Re}\,c - \mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^{N}a_{i,j}g_{x_i}g_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}b_i g_{x_i} - \frac{1}{2}|b_{i,x_i}| \geqslant \mathrm{Re}\,c - \alpha_1 Q^{-2}.$$

Отметим, что для корректной разрешимости задачи Коши теорема 4 не дает классы А. Н. Тихонова в случае уравнения теплопроводности и $G = R^N$, так как для выполнимости неравенства (12) можно положить только $g \leqslant |x|$. Их нетрудно получить при образовании уравнения (1)

$$h = \frac{T}{2T - t}\,g(x),$$

показав, что область определения $L_{t,\max}$ не зависит от t, но для этого необходимо дополнительно наложить ограничения на сингулярность производной от старших коэффициентов.

Теорема 5. Пусть $G = (x : |x| < R)$, $0 < R \leqslant \infty$ и для всех $x \in G$ выполнены ограничения теоремы 2, тогда будет иметь место утверждение теоремы 4 при

$$g = \int_0^{|x|}\sqrt{\frac{g^{1-\delta}}{a}}\,dt.$$

Доказательство аналогично рассуждению, приведенному в теореме 4.

Классы стабилизации. Будем предполагать, что $f \equiv 0$, коэффициенты оператора $L_t \equiv L$ не зависят от t, $T = \infty$ и $\tilde{L}_{\min} = \tilde{L}_{\max}$. Под решением задачи Коши в этом случае мы понимаем функцию $u(x, t)$, такую, что при $\forall t$ $v = ue^{-g} \in \mathscr{D}(\tilde{L}_{\min}) = \mathscr{D}(\tilde{L}_{\max})$, v имеет сильную производную по t из $\mathscr{L}^2(G)$, при всех t удовлетворяет уравнению (7) и условию $v(0) = \tilde{\varphi} = \varphi e^{-g}$.

Мы будем говорить, что пространство $\mathscr{L}_g^2$ будет классом стабилизации, если для решения $u(x, t)$ рассматриваемой задачи Коши существует

$$\lim_{t\to\infty}\|u\|^2_{\mathscr{L}_g^2} < \infty.$$

Теорема 6. Пусть выполнены условия теорем 4 или 5, тогда при соответствующей функции g (описанной в условии соответствующей теоремы) $\mathscr{L}_g^2$ будет классом стабилизации задачи Коши и $\lim\limits_{t\to\infty}\|u\|_{\mathscr{L}_g^2} = 0$.

Доказательство следует из полуограниченности оператора $\tilde{L}_{\min} = \tilde{L}_{\max}$ замкнутости и свойств полугруппы соответствующей задачи Коши.

Пример 3. Пусть

$$L = -\Delta + \beta, \quad \beta > 0, \quad G = R^N,$$

тогда при

$$g = \varepsilon \sqrt{|x|^{2n} + 1}, \quad (\varepsilon < \beta),$$

$\mathscr{L}_g^2$ — класс стабилизации задачи Коши.

Пример 4. Рассмотрим уравнение теплопроводности при следующих данных : $L = -a^2\Delta$, $G = R^N$, $N \geqslant 3$ (n — целое число). При $h = g = \frac{1}{2} \ln (|x|^{2n} + 1)$ для уравнения теплопроводности $\mathscr{L}_g^2$ будет классом стабилизации и по метрике $\mathscr{L}_g^2$ $\left(\|u\|^2_{\mathscr{L}_g^2} = \int\limits_{R^N} \frac{|u|^2\,dx}{1 + |x|^{2n}} \right)$ при $t \to \infty$ решение данной задачи стремится к гармонической функции.

Этот факт вытекает из положительной формы $\mathrm{Re}\,(\tilde{L}\varphi, \varphi)$ на $C_0^\infty(R^N)$, которая устанавливается с использованием принципа неопределенности [5]

$$\int\limits_{R^N} |\nabla\varphi|^2\,dx \geqslant \frac{1}{4} \int\limits_{R^N} \frac{|\varphi|^2\,dx}{|x|^2} \; \forall\, \varphi \in C_0^\infty(R^N), \quad N > 3$$

и преобразованием координат $x = \alpha\tilde{x}$, где α (a) — постоянная.

1. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для эволюционных уравнений // Успехи мат. наук.— 1978.— 33, № 5.— С. 7—76.
2. *Камынин Л. И., Химченко Б. Н.* Об анизотропных классах единственности решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения.— 1985.— 21, № 5.— С. 832—841.
3. *Шевченко В. И.* О совпадении минимального и максимального операторов для дифференциальных выражений с особенностью в старших коэффициентах // Граничные задачи для дифференциальных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1980.— С. 219—229.
4. *Прокопенко Л. Н.* Некоторые исследования по абстрактной задаче Коши и их применения к параболическим уравнениям: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Киев: Изд. Киев. ун-та, 1964.— 17 с.
5. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 4 т.— М. : Мир, 1978.— Т. 2.— 358 с.

Филиал Моск. автомобилестроит. ин-та, Кинешма

Получено 01.10.90